Applications - Chapitre 7

Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

EPFL

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

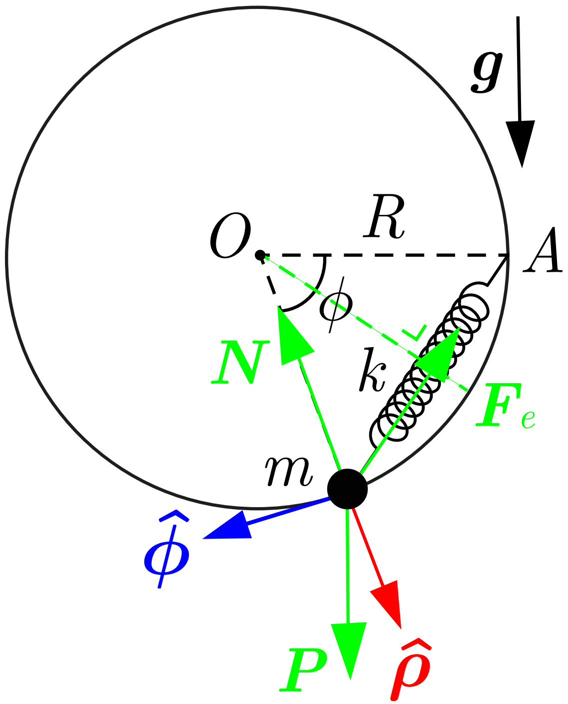
A.7.2 Pendule asymétrique

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

A.7.2 Pendule asymétrique

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

- Un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide négligeable fixé en A se déplace sans frottement sur un cercle vertical de centre O et de rayon R.



- Energies potentielles :
  1. Gravitationnelle : (référence : droite OA)

$$V_g = -mgR\sin\phi \qquad (A.7.1)$$

  2. Elastique : (référence : point A)

$$V_e = \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 \qquad (A.7.2)$$

- Energie potentielle totale :

$$V = V_e + V_g = 2kR^2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - mgR\sin\phi \qquad (A.7.3)$$

- Formule de trigonométrie : $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1 - \cos\phi}{2}$

$$(A.7.3) \quad \Rightarrow \quad V = kR^2\left(1 - \cos\phi\right) - mgR\sin\phi \qquad (A.7.4)$$

- Positions d'équilibre : $\left.\frac{dV}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0$

$$\left.\frac{dV}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = kR^2\sin\phi_0 - mgR\cos\phi_0 = 0 \qquad (A.7.5)$$

fonction tangente : périodicité π

$$\Rightarrow \quad \tan\phi_0 \equiv \frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0} = \frac{mg}{kR} > 0 \qquad (A.7.6)$$

Il existe 2 solutions

1. $\phi_0 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) \equiv \phi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\phi_0 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) + \pi \equiv \phi_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

- Stabilité des positions d'équilibre :

$$\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \frac{d}{d\phi}\left(\frac{dV}{d\phi}\right)\Big|_{\phi=\phi_0} = \frac{d}{d\phi}\left(kR^2\sin\phi - \; mgR\cos\phi\right)\Big|_{\phi=\phi_0}$$

$$= kR^2\cos\phi_0 + mgR\sin\phi_0 = kR^2\left(1+\frac{mg}{kR}\,\tan\phi_0\right)\cos\phi_0$$

$$\overset{(A.7.6)}{=\!=\!=} kR^2\left(1+\frac{m^2g^2}{k^2R^2}\right)\cos\phi_0 \qquad (A.7.7)$$

1. $\phi_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_1 \equiv \cos\phi_0 > 0$

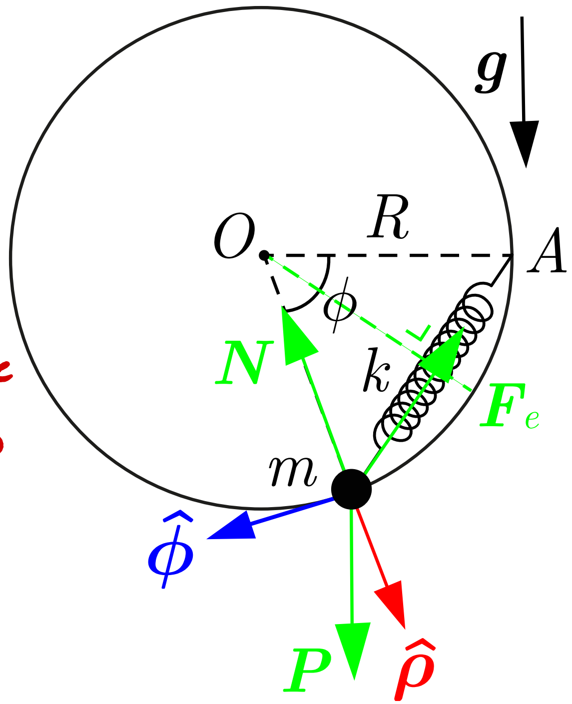
   $\Rightarrow \quad \left.\dfrac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0\equiv\phi_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stable}$

2. $\phi_2 \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_2 \equiv \cos\phi_0 < 0$

   $\Rightarrow \quad \left.\dfrac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0\equiv\phi_2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{instable}$

- Interprétation physique :

  La position d'équilibre ϕ_1 qui est en dessous du point d'attache A est stable, la position d'équilibre $\phi_2 = \phi_1 + \pi$ qui est en-dessus du point A est instable.



- Petites oscillations autour de $\phi = \phi_1 \Rightarrow$ eq. du mvt

- Energie cinétique : $\Rightarrow$ dérivée de l'énergie mécanique

  $E = T + V = \text{cste} \Rightarrow \dot{E} = 0$

$$T = \frac{1}{2}\, m \boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}\, m \left(R\, \dot{\phi}\, \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \cdot \left(R\, \dot{\phi}\, \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, R^2 \dot{\phi}^2 \qquad (A.7.8)$$

- Energie mécanique :

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, m\, R^2 \dot{\phi}^2 + kR^2 \left(1 - \cos\phi\right) - mgR \sin\phi \qquad (A.7.9)$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $(E = \text{cste})$

$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\phi}^2 + k R^2 (1-\cos\phi) - mg \sin\phi$

$$\dot{E} = m\,R^2\dot{\phi}\,\ddot{\phi} + kR^2\dot{\phi}\sin\phi - \; mgR\,\dot{\phi}\cos\phi = 0 \qquad (A.7.10)$$

- Equation du mouvement : on divise (A.7.10) par $m R^2 \dot{\phi}$:

$$(A.7.10) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \frac{k}{m}\sin\phi - \frac{g}{R}\cos\phi = 0 \qquad (A.7.11)$$

- Petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\phi = \phi_1$:

$$\alpha = \phi - \phi_1 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} = \ddot{\phi} \quad \text{et} \quad \sin\alpha \simeq \alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha \simeq 1$$

$$(A.7.10) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{k}{m}\sin(\phi_1 + \alpha) - \frac{g}{R}\cos(\phi_1 + \alpha) = 0 \qquad (A.7.12)$$

- Formules de trigonométrie : $(\alpha \ll 1)$

$\cos\alpha \simeq 1$ $\sin\alpha \simeq \alpha$

$$\sin(\phi_1 + \alpha) \simeq \sin\phi_1 + \cos\phi_1\,\alpha \qquad (A.7.13)$$

$\cos\alpha \simeq 1$ $\sin\alpha \simeq \alpha$

$$\cos(\phi_1 + \alpha) \simeq \cos\phi_1 - \;\sin\phi_1\,\alpha \qquad (A.7.14)$$

- Equation du mouvement : (petites oscillations)

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{m}\left(\sin\phi_1 + \cos\phi_1\,\alpha\right) - \frac{g}{R}\left(\cos\phi_1 - \sin\phi_1\,\alpha\right) = 0 \qquad (A.7.15)$$

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{m}\cos\phi_1 + \frac{g}{R}\sin\phi_1\right)\alpha + \left(\frac{k}{m}\sin\phi_1 - \frac{g}{R}\cos\phi_1\right) = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \left(1 + \frac{mg}{kR}\underbrace{\tan\phi_1}_{=mg/kR}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1\,\alpha + \left(\underbrace{\tan\phi_1}_{=mg/kR} - \frac{mg}{kR}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1 = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \left(\left(1 + \frac{m^2g^2}{k^2R^2}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1\right)\alpha = 0 \qquad (A.7.16)$$

- Identité trigonométrique :

$$\sin^2\phi_1 + \cos^2\phi_1 = 1 \quad \xrightarrow{\cdot 1/\cos^2\phi_1} \quad \tan^2\phi_1 + 1 = \frac{1}{\cos^2\phi_1}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{m^2g^2}{k^2R^2}}} \qquad (A.7.17)$$

- Equation du mouvement : (petites oscillations)

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{m}\sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{k^2 R^2}}\right)\alpha = 0 \qquad (A.7.18)$$

- Pulsation :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{k^2 R^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2}} \qquad (A.7.19)$$

1. $\|\boldsymbol{F}_e\| \gg \|\boldsymbol{P}\| \quad \Rightarrow \quad kR \gg mg \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} \gg \frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \simeq \frac{k}{m}$

   Poids négligeable $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

   Angle d'équilibre : $\phi_1 = \arctan\left(\frac{mg}{\underbrace{kR}_{\to\infty}}\right) \to 0$ ⇒ Le point matériel oscille autour du pointe d'attache A

2. $\|\boldsymbol{P}\| \gg \|\boldsymbol{F}_e\| \quad \Rightarrow \quad mg \gg kR \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{R} \gg \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \simeq \frac{g}{R}$

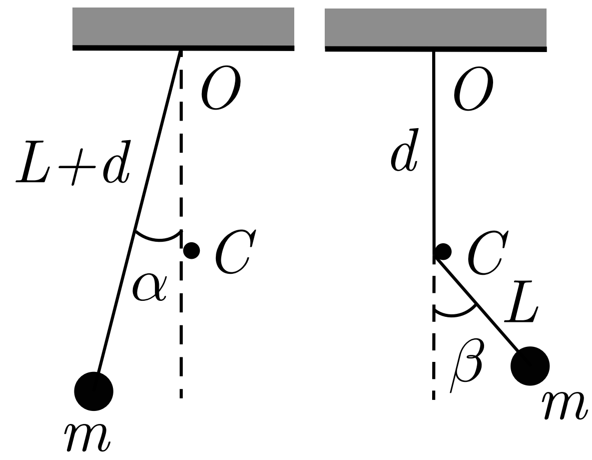
   Force élastique négligeable $\Rightarrow$ pendule vertical ⇒ Le point matériel oscille autour du point au bas du cercle

   Angle d'équilibre : $\phi_1 = \arctan\left(\frac{mg}{\underbrace{kR}_{\to 0}}\right) \to \frac{\pi}{2}$

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

A.7.2 Pendule asymétrique

- Soit un pendule asymétrique constitué d'une masse m attachée à un fil de longueur $L + d$ et de masse négligeable fixé au point O. Un clou se trouve au point C à une distance d au-dessous de O.



1. Gauche :

   - Energie cinétique :

$$T_g = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, (L+d)^2\, \dot{\alpha}^2 \qquad (A.7.20)$$

   - Energie potentielle : référence : droite horizontale qui passe par le point d'attache O

$$V_g = -\, mg\, (L+d) \cos\alpha \qquad (A.7.21)$$

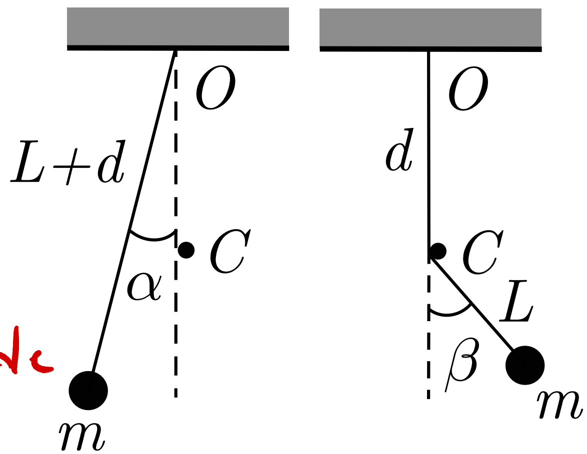
   - Energie mécanique : $E \equiv E_g = E_d = \text{cste}$

$$E = T_g + V_g = \frac{1}{2}\, m\, (L+d)^2\, \dot{\alpha}^2 - \, mg\, (L+d) \cos\alpha \qquad (A.7.22)$$

2 Droite :

- Energie cinétique :

$$T_d = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,mL^2\dot{\beta}^2 \qquad (A.7.23)$$



- Energie potentielle : référence : droite horizontale qui passe par le point O

$$V_d = -\,mg\,(d + L\cos\beta) \qquad (A.7.24)$$

- Energie mécanique : $E \equiv E_d = E_g = \text{cste}$

$$E = T_d + V_d = \frac{1}{2}\,mL^2\dot{\beta}^2 - \,mg\,(d + L\cos\beta) \qquad (A.7.25)$$

- Equations du mouvement : $(E = \text{cste})$

1. Gauche : $E = \frac{1}{2} m (L+d)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(d+L)\cos\alpha$

$$\dot{E} = m\,(L+d)^2\,\ddot{\alpha}\,\dot{\alpha} + mg\,(L+d)\sin\alpha\,\dot{\alpha} = 0 \qquad (A.7.26)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L+d}\,\sin\alpha = 0 \qquad (A.7.27)$$

2. Droite : $E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\beta}^2 - mg(d + L\cos\beta)$

$$\dot{E} = m\,L^2\,\ddot{\beta}\,\dot{\beta} + mgL\sin\beta\,\dot{\beta} = 0 \qquad (A.7.28)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\beta} + \frac{g}{L}\,\sin\beta = 0 \qquad (A.7.29)$$

- Petites oscillations autour de l'équilibre $\alpha = \beta = 0$:

1. Gauche : $\alpha \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \simeq \alpha$

$$(A.7.27) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \omega_g^2\,\alpha = 0 \tag{A.7.30}$$

$$\text{où} \quad \omega_g^2 = \frac{g}{L+d} \tag{A.7.31}$$

2. Droite : $\beta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\beta \simeq \beta$

$$(A.7.29) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\beta} + \omega_d^2\,\beta = 0 \tag{A.7.32}$$

$$\text{où} \quad \omega_d^2 = \frac{g}{L} \tag{A.7.33}$$

- Demi-périodes d'oscillation : $\omega_g < \omega_d$

$$\omega_g < \omega_d \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{\omega_g} > \frac{\pi}{\omega_d} \tag{A.7.34}$$

La demi-période d'oscillation à gauche π/ω_g est plus longue que la demi-période d'oscillation à droite π/ω_d.